JOURNAL OF ALGEBRA 12, 207–215 (1969)

Eine Verallgemeinerung eines Multiplizitätensatzes von D. Rees*

ERWIN BÖGER

I. Math. Institut der Universität Münster, Münster, Germany

Communicated by D. Rees

Received June 4, 1968; revised July 28, 1968

EINLEITUNG

In der algebraischen Geometrie spielt das Vervollständigen von Idealen und Moduln durch Hinzunahme ganzabhängiger Elemente eine bedeutende Rolle, wie man zum Beispiel den Appendizes 4 und 5 in [*10*] und auch der dort im Appendix 5 zitierten Arbeit von O. Zariski entnehmen kann. Northcott und Rees haben in [*5*] auf den engen Zusammenhang zwischen diesem Vervollständigungsprozeß und einem Problem der Multiplizitätentheorie lokaler Ringe hingewiesen (vgl. auch [*9*] und [*3*]): Ist ein nulldimensionales Ideal $\mathfrak{a}$ in einem d-dimensionalen lokalen Ring R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und dem Restklassenkörper $R/\mathfrak{m} = k$ gegeben, so sucht man Bedingungen dafür, daß die *Multiplizität* $e(\mathfrak{b})$ eines nulldimensionalen Ideals $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ mit $e(\mathfrak{a})$ übereinstimmt. Man findet unmittelbar die hinreichende Bedingung, daß $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{n-1}$ für alle hinreichend großen n ist; nach [*5*] heißt $\mathfrak{b}$ dann eine ***Reduktion*** von $\mathfrak{a}$. Eine andere hinreichende Bedingung, die mit der ersten in engem Zusammenhang steht (vgl. [*1*], §0), wurde von Samuel und Nagata (vgl. [*8*], [*2*] und [*4*], 24.1) untersucht : die Bedingung, daß $\mathfrak{b}$ von einem für $\mathfrak{a}$ "*superfiziellen*" Parametersystem erzeugt wird (wobei dieser Begriff geeignet zu definieren ist).

Dagegen fehlten längere Zeit Untersuchungen über notwendige Bedingungen, bis Rees in [*7*] den folgenden Satz bewies : Ist R *quasiungemischt*, d.h. haben in der Komplettierung von R alle minimalen Primideale die gleiche Dimension, und haben zwei nulldimensionale Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ die gleiche Multiplizität, $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$, so ist $\mathfrak{b}$ eine Reduktion von $\mathfrak{a}$. Für nulldimensionale Ideale $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ in einem quasiungemischten Ring ist also genau dann $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$, wenn $\mathfrak{b}$ eine Reduktion von $\mathfrak{a}$ ist.

* Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um einen Teil der Dissertation des Verfassers.

§ 1

In der vorliegenden Arbeit soll nun in erster Linie eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf den Fall beliebiger Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ in dem lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ bewiesen werden. Wir übernehmen im Folgenden einige Definitionen und einfache Tatsachen aus [5]. $\mathfrak{b}$ heißt wieder eine *Reduktion* von $\mathfrak{a}$, wenn es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so daß $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{n-1}$ für $n \geqslant n_0$ ist; $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ haben dann das gleiche Radikal. In [5] wird ferner die Zahl $l(\mathfrak{a})$ ("*analytic spread of* $\mathfrak{a}$") definiert, die den Grad des Polynoms, das für hinreichend große n durch $L(\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^n\mathfrak{m})$ geliefert wird, um 1 übertrifft. Ist der Restklassenkörper k unendlich, so ist $l(\mathfrak{a})$ die minimale Anzahl von Elementen von $\mathfrak{a}$, die nötig sind, um eine Reduktion von $\mathfrak{a}$ zu erzeugen. Ist $\mathfrak{p}$ irgendein minimales Primideal von $\mathfrak{a}$, so ist $l(\mathfrak{a})$ mindestens gleich der Höhe $ht(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$. $ht(\mathfrak{a})$ bezeichne das Minimum der Höhen $ht(\mathfrak{p})$ für alle minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$. Die angekündigte Verallgemeinerung des Satzes von Rees heißt dann:

Satz 1. *R sei quasiungemischt, und es seien zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von R mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ und $ht(\mathfrak{b}) = l(\mathfrak{b})$ gegeben. Für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{b}$ sei $\mathfrak{a}R_\mathfrak{p} \neq R_\mathfrak{p}$ und $e(\mathfrak{a}R_\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{b}R_\mathfrak{p})$. Dann ist $\mathfrak{b}$ eine Reduktion von $\mathfrak{a}$.*

Die Bedingung $ht(\mathfrak{b}) = l(\mathfrak{b})$, die für ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal $\mathfrak{b}$ (d.h. in dem von Rees behandelten Fall) trivialerweise erfüllt ist, ist im allgemeinen recht einschneidend, kann aber nicht fortgelassen werden. Sie impliziert wegen [*4*], 34.5 z.B., daß die minimalen Primideale von $\mathfrak{b}$ alle die gleiche Höhe und die gleiche Dimension haben. Jedoch hat unsere Beweismethode gegenüber der von Rees benutzten neben der größeren Allgemeinheit den Vorzug, daß sie weitere Sätze von der gleichen Art liefert, d.h. hinreichende Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{b}$ eine Reduktion von $\mathfrak{a}$ ist. Einige Hinweise dazu finden sich am Schluß dieser Arbeit, für eine eingehende Behandlung dieses Problems muß jedoch auf [*1*] verwiesen werden.

Der Beweis von Satz 1 stützt sich auf den folgenden elementaren Satz 2. Die Elemente $f_1, ..., f_r, ..., f_m \in R$ mögen das beliebige Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ erzeugen. Wir bilden nun mit dem Unbestimmten $x_{ij} (1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ die Elemente $A_i = f_1 x_{i1} + \cdots + f_m x_{im} \in R[x_{11}, ..., x_{rm}]$, $(1 \leqslant i \leqslant r)$, und den Ring)[1]

$$\underset{\sim}{Q} = R[x_{11}, ..., x_{rm}]/(A_1, ..., A_r).$$

Die Lokalisierung von $R[x_{11}, ..., x_{rm}]$ nach dem von $\mathfrak{m}$ und den x_{ij} mit $i \neq j$ aufgespannten Ideal werde mit $\underset{\sim}{Q}^*$ bezeichnet. Außerdem setzen wir $\underset{\sim}{Q}' = \underset{\sim}{Q}^*/(A_1, ..., A_r)$.

---

[1] Runde Klammern deuten die Idealbildung in dem betreffenden Ring an, in diesem Fall z.B. in $R[x_{11}, ..., x_{rm}]$. Im Zweifelsfall fügen wir noch den Ring hinzu: Hier müßten wir z.B. dann $(A_1, ..., A_r)\ R[x_{11}, ..., x_{rm}]$ schreiben.

Satz 2. *Das Ideal* $\mathfrak{a}\,Q'$ *ist genau dann nilpotent (in* Q'*), wenn* $(f_1,\dots,f_r)\,R$ *eine Reduktion von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

§ 2

Beweis des Satzes 2. Ist $(f_1,\dots,f_r)\,R$ eine Reduktion von $\mathfrak{a}$, etwa $\mathfrak{a}^n = (f_1,\dots,f_r)\,\mathfrak{a}^{n-1}$ $(n \geqslant n_0)$, so ist offenbar

$$(\mathfrak{a}Q^*)^n \subset (A_1,\dots,A_r)(\mathfrak{a}Q^*)^{n-1} + (\{x_{ij}\,;\, i \neq j\})(\mathfrak{a}Q^*)^n$$

für $n \geqslant n_0$, also $(\mathfrak{a}Q^*)^n = (A_1,\dots,A_r)(\mathfrak{a}Q^*)^{n-1}$ $(n \geqslant n_0)$, d.h. $\mathfrak{a}Q'$ ist nilpotent.

Zum Beweis der Umkehrung überlegt man sich zunächst :

Lemma 1. $\mathfrak{a}Q'$ *ist genau dann nilpotent, wenn* $\mathfrak{a}Q''$ *nilpotent ist in dem Ring* Q''*, der mit Hilfe einer anderen Basis* $f'_1,\dots,f'_r,\dots,f'_{m'}$ *von* $\mathfrak{a}$ *mit* $f'_i = f_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *in der gleichen Weise gebildet wird wie* Q'.

Wir deuten den sehr elementaren Beweis nur an und beschränken uns dazu auf den Fall $m' = m$, aus dem der allgemeine Fall durch einfache Modifikationen hervorgeht : Bezeichnet $\mathbf{f}$ die Zeile der $f_1,\dots,f_m$ und $\mathbf{f}'$ die Zeile der $f'_1,\dots,f'_m$, so gibt es eine modulo $\mathfrak{m}$ invertierbare Matrix $\mathbf{M}$, so daß $\mathbf{f} = \mathbf{f}'\mathbf{M}$ ist und die r ersten Spalten von $\mathbf{M}$ mit den entsprechenden Spalten der Einheitsmatrix übereinstimmen. Ist nun für $1 \leqslant i \leqslant r$ $\mathbf{x}_i$ die Spalte der Unbestimmten $x_{i1},\dots,x_{im}$, so können wir eine Spalte $\mathbf{x}'_i$ algebraisch unabhängiger Elemente $x'_{i1},\dots,x'_{im}$ einführen durch die Festsetzung $\mathbf{x}'_i = \mathbf{M}\mathbf{x}_i$. Dabei ist $A_i = \mathbf{f}\mathbf{x}_i = \mathbf{f}'\mathbf{M}\mathbf{x}_i = \mathbf{f}'\mathbf{x}'_i = f'_1x'_{i1} + \cdots + f'_mx'_{im}$, und das von den x_{ij} mit $i \neq j$ aufgespannte Ideal geht in das von den x'_{ij} mit $i \neq j$ aufgespannte Ideal über. Indem man auf diese Weise Q' in Q'' "transformiert", zeigt man Lemma 1.

Den wesentlichen Teil des Beweises von Satz 2 enthält das folgende Lemma, das keinerlei Voraussetzungen über $\mathfrak{a}$, r oder die Elemente $f_1,\dots,f_r \in \mathfrak{a}$ benötigt :

Lemma 2. *Falls* k *unendlich ist, gibt es Elemente* $g_1,\dots,g_r \in \mathfrak{a}$ *und ganze Zahlen* $l_1,\dots,l_r \geqslant 1$ *und* n_1*, so daß für* $n \geqslant n_1$ *in dem mit Unbestimmten* $x_1,\dots,x_r$, $y_1,\dots,y_r$ *gebildeten Ring* $R[x_1,\dots,y_r]_{(\mathfrak{m})+(x_1,\dots,y_r)}$ *gilt (Klammern deuten die in diesem Ring aufgespannten Ideale an)* :

$$(\mathfrak{a})^n \cap ((f_1x_1 + g_1y_1)^{l_1},\dots,(f_rx_r + g_ry_r)^{l_r})$$
$$= (f_1x_1 + g_1y_1)^{l_1}(\mathfrak{a})^{n-l_1} + \cdots + (f_rx_r + g_ry_r)^{l_r}\,\mathfrak{a}^{n-l_r}.$$

Aus diesem Lemma folgt Satz 2 unmittelbar: Denn unter der Voraussetzung, daß k unendlich ist (andernfalls geht man nämlich wie üblich zu einer Ringerweiterung von der in [*4*], 6.14 behandelten Art über) und daß $\mathfrak{a}\underset{\sim}{Q}'$ nilpotent ist, wählt man Elemente $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{a}$ und Zahlen $l_1, \ldots, l_r, n_1$ wie in Lemma 2, ergänzt $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_r$ zu einer Basis von $\mathfrak{a}$ und wendet Lemma 1 an: Nachdem all unnötigen Variablen herausdividiert sind, ist das von $\mathfrak{a}$ in dem Ring

$$R[x_1, \ldots, y_r]_{(\mathfrak{m})+(y_1,\ldots,y_r)}/(f_1x_1 + g_1y_1, \ldots, f_rx_r + g_ry_r)$$

aufgespannte Ideal nilpotent. Es gibt also wegen Lemma 2 ein Polynom $s \in R[x_1, \ldots, y_r]$, das einen Term der Form $ex_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$ ($e \in R$, $e \notin \mathfrak{m}$) enthält, so daß in dem Ring $R[x_1, \ldots, y_r]$ für alle hinreichend großen n gilt:

$$s(\mathfrak{a})^n \subset (f_1x_1 + g_1y_1)^{l_1}(\mathfrak{a})^{n-l_1} + \cdots + (f_rx_r + g_ry_r)^{l_r}(\mathfrak{a})^{n-l_r}.$$

Daraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich sofort der noch ausstehende Teil von Satz 2:

$$\mathfrak{a}^n = f_1^{l_1}\mathfrak{a}^{n-l_1} + \cdots + f_r^{l_r}\mathfrak{a}^{n-l_r}$$

für all hinreichend großen n.

§ 3

Beweis des Lemmas 2 (*Induktion über* r). Im Falle $r = 1$ (wir lassen die Indizes fort) sei

$$(*) \qquad F = (fx + gy)^l \sum a_{\kappa\lambda} x^\kappa y^\lambda \in (\mathfrak{a})^n, \qquad a_{\kappa\lambda} \in R.$$

Durch Koeffizientenvergleich der Glieber vom Grade $\kappa + \lambda + l = p + l$ ergeben sich die Beziehungen

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{aligned} &y^{p+l}a_{0,p}g^l \in (\mathfrak{a})^n \\ &y^{p+l-1}x^1\left(\binom{l}{1}a_{0,p}fg^{l-1} + \binom{l}{0}a_{1,p-1}g^l\right) \in (\mathfrak{a})^n \end{aligned}$$

Die letzte Beziehung, die wir brauchen, lautet:

$$\binom{*}{*} \qquad y^lx^p\left(\binom{l}{p}a_{0,p}f^pg^{l-p} + \cdots + \binom{l}{0}a_{p,0}g^l\right) \in (\mathfrak{a})^n,$$

wobei wie üblich im Fall $p > l$ $\binom{l}{p} = 0$ gesetzt wird. Wir können nun voraussetzen, daß g und l so gewählt sind, daß g superfiziell für $\mathfrak{a}$ ist und in keinem derjenigen assoziierten Primideale von (0) liegt, die $\mathfrak{a}$ nicht enthalten, und daß $0 : g^l \subset 0 : \mathfrak{a}^l$ ist. Dann ist für ein geeignetes c $(\mathfrak{a}^n : g^l) \cap \mathfrak{a}^c = \mathfrak{a}^{n-l}$, und wegen [4], 3.12 auch $(\mathfrak{a}^n : g^l) \subset (0 : g^l) + \mathfrak{a}^{n-l} \subset (0 : \mathfrak{a}^l) + \mathfrak{a}^{n-l}$ für alle hinreichend großen n. Also ist nach ($\substack{*\\*}$) etwa $a_{0,p} = c_{0,p} + b_{0,p}$, $c_{0,p} \in 0 : \mathfrak{a}^l$, $b_{0,p} \in \mathfrak{a}^{n-l}$. Man kann also in (*) und ($\substack{*\\*}$), ohne F zu verändern, $a_{0,p}$ durch $b_{0,p}$ ersetzen. Aus der zweiten Beziehung in ($\substack{*\\*}$) ergibt sich dann genauso, daß man $a_{1,p-1}$ durch ein $b_{1,p-1} \in \mathfrak{a}^{n-l}$ ersetzen kann, usw. Daraus folgt aber die Behauptung im Falle $r = 1$. Sie sei nun auch schon für $r - 1$ nachgewiesen. Sind dann r Elemente $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{a}$ gegeben, so wählen wir zunächst gemäß der Induktionsvoraussetzung, angewandt auf $f_1, \ldots, f_{r-1}$, Elemente $g_1, \ldots, g_{r-1} \in \mathfrak{a}$ und Zahlen $l_1, \ldots, l_{r-1} \geqslant 1$. Auf den Ring

$$R[x_1, \ldots, y_{r-1}]_{(\mathfrak{m})+(x_1,\ldots,y_{r-1})}/((f_1x_1 + g_1y_1)^{l_1}, \ldots, (f_{r-1}x_{r-1} + g_{r-1}y_{r-1})^{l_{r-1}}),$$

auf das darin von $\mathfrak{a}$ aufgespannte Ideal und auf das Element f_r wendet man dann noch einmal den Fall $r = 1$ an und findet ein Element g_r und eine Zahl $l_r \geqslant 1$. Nun kam es im Fall $r = 1$ bei der Wahl von g offenbar nur auf die Wahl der Restklasse von g in $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ an: Sie durfte nicht in gewissen k-Untervektorräumen von $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ liegen. Da man im vorliegenden Fall (Klammern deuten die Idealbildung in

$$R[x_1, \ldots, y_{r-1}]_{(\mathfrak{m})+(x_1,\ldots,y_{r-1})} \text{ an)}$$

$$(\mathfrak{a})/(\mathfrak{a})((\mathfrak{m}) + (x_1, \ldots, y_{r-1}))$$

mit $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ identifizieren kann, kann man g_r schon in $\mathfrak{a}$ wählen. Liegt nun ein Element F des Ringes

$$R[x_1, \ldots, y_r]_{(\mathfrak{m})+(x_1,\ldots,y_r)}$$

in $(\mathfrak{a})^n \cap ((f_1x_1 + g_1y_1)^{l_1}, \ldots, (f_rx_r + g_ry_r)^{l_r})$, so gibt es ein Element

$$F' \in (\mathfrak{a})^n \cap ((f_1x_1 + g_1y_1)^{l_1}, \ldots, (f_{r-1}x_{r-1} + g_{r-1}y_{r-1})^{l_{r-1}})$$

so daß $F - F' \in (f_rx_r + g_ry_r)^{l_r} (\mathfrak{a})^{n-l_r}$ ist. Da aber dann auch

$$F' \in (f_1x_1 + g_1y_1)^{l_1} (\mathfrak{a})^{n-l_1} + \cdots + (f_{r-1}x_{r-1} + g_{r-1}y_{r-1})^{l_{r-1}} (\mathfrak{a})^{n-l_{r-1}}$$

ist, sind Lemma 2 und damit auch Satz 2 bewiesen.

§ 4

Beweis des Satzes 1. Aus beweistechnischen Gründen ersetzen wir die Voraussetzung "R sei quasiungemischt" durch die folgende Bedingung (die von quasiungemischten Ringen offensichtlich erfüllt wird, aber auch, wie man leicht zeigen kann, nicht wirklich schwächer ist als die Bedingung, quasiungemischt zu sein) : Es gibt eine treuexakte Ringerweiterung (R, R^*) von R, so daß $(R^*, \mathfrak{m}^*)$ ein lokaler Ring ist, $\mathfrak{m}R^* = \mathfrak{m}^*$ ist und R^* sich als Faktorring $R'/\mathfrak{a}'$ eines regulären, lokalen Ringes R' nach einem Ideal $\mathfrak{a}'$ darstellen läßt, dessen minimale Primideale alle die gleiche Dimension haben. In Ringen R mit dieser Eigenschaft gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ $ht\,\mathfrak{p} + \dim \mathfrak{p} = \dim R$. Ist nämlich $\mathfrak{p}^*$ ein minimales Primideal von $\mathfrak{p}R^*$, so ist $(R_{\mathfrak{p}}, R^*_{\mathfrak{p}^*})$ eine treuexakte Ringerweiterung, d.h. es ist $ht\,\mathfrak{p} = ht\,\mathfrak{p}^*$. Da aber in dem regulären Ring R' die erste Kettenbedingung für Primideale gilt ([*4*], 34), ist $ht\,\mathfrak{p}^* = \dim R - \dim \mathfrak{p}^*$. Dann ist aber erst recht $ht\,\mathfrak{p} + \dim \mathfrak{p} = \dim R$.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß k unendlich ist, denn mit R erfüllt auch ein Ring $R(X)$ die gerade diskutierte Bedingung. Man wählt also $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{b}$ mit $r = ht\,\mathfrak{b} = l(\mathfrak{b})$ so, daß $(f_1, \ldots, f_r)\, R$ eine Reduktion von $\mathfrak{b}$ ist (vgl. [5] oder §0 in [*1*]). Wir ergänzen $f_1, \ldots, f_r$ zu einer Basis $f_1, \ldots, f_m$ von $\mathfrak{a}$ und nehmen an, daß in dem mit dieser Basis wie in Satz 2 gebildeten Ring das Ideal $\mathfrak{a}\,\underset{\sim}{Q}'$ nicht nilpotent ist, daß es also in $\underset{\sim}{Q}^*$ ein minimales Primideal $\mathfrak{r}$ von $(A_1, \ldots, A_r)\,\underset{\sim}{Q}^*$ gibt, das $\mathfrak{a}\,\underset{\sim}{Q}^*$ nicht umfaßt. (Insbesondere ist dann $m > r$.) Können wir diese Annahme zu einem Widerspruch führen, so folgt nach Satz 2 die Behauptung.

Wegen des Lemmas 1 können wir annehmen, daß $f_m \notin \mathfrak{r}$ ist. Wir bilden nun $\underset{\sim}{Q}'_{\mathfrak{r}Q'}$, indem wir zuerst mit dem multiplikativen System

$$S = \{f_m{}^i;\ 1 \leqslant i < \infty\}$$

erweitern und dann erst lokalisieren. Da sich die Elemente $A_1, \ldots, A_r$ in dem Ring $R_S[x_{11}, \ldots, x_{rm}]$ zu einem über R_S algebraisch unabhängigen Elementsystem von rm Elementen ergänzen lassen, weiß man aber, daß sich $\mathfrak{r}\,\underset{\sim}{Q}'_S$ wie alle minimalen Primideale von $\underset{\sim}{Q}'_S$ einfach durch Extension aus einem minimalen Primideal von R_S ergibt und daß sich bei dieser Extension die Länge der zugehörigen Primärkomponente des Nullideals nicht ändert (weil diese Extension aus einer Polynomringerweiterung von R_S durch Übergang zu einem Quotientenring entsteht). Die Länge $L(\underset{\sim}{Q}'_{\mathfrak{r}Q'})$ des nulldimensionalen lokalen Ringes $\underset{\sim}{Q}'_{\mathfrak{r}Q'} = (\underset{\sim}{Q}'_S)_{\mathfrak{r}Q'_S}$ ist also mindestens gleich $c = \min L(R_{\mathfrak{q}})$, wobei $\mathfrak{q}$ die minimalen Primideale von R durchläuft. Da $A_1, \ldots, A_r$ mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt sind und $ht(\mathfrak{a}) = r$ ist, ist $ht(\mathfrak{r}) = r$, und da $\underset{\sim}{Q}^*$ ebenfalls die zu Beginn des Beweises für R geforderte Bedingung erfüllt, ist $\dim \mathfrak{r} = \dim \underset{\sim}{Q}^* - r$. Genauso gilt für die minimalen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die wie erwähnt wegen der Beziehung $ht(\mathfrak{b}) = l(\mathfrak{b})$ ebenfalls alle die Höhe r haben: $\dim \mathfrak{p}_i \underset{\sim}{Q}^* = \dim \underset{\sim}{Q}^* - r = \dim \mathfrak{r}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. In dem Ring $\underset{\sim}{Q}^*/(A_1{}^n, \ldots, A_r{}^n)$ $(n \geqslant 1)$, unter dessen minimalen Primidealen nun sicher die von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ und $\mathfrak{r}$ erzeugten sind, spannen die Elemente x_{ij} mit $i \neq j$ ein Hauptklassenideal auf. Wir nutzen aus, daß bei der Division durch solche Ideale die Multiplizität höchstens wächst (vgl. [*4*], 24.2 (1)), und bezeichnen dabei das von den x_{ij} mit $i \neq j$ erzeugte Ideal mit $(x)'$:

$$e(\mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}^* + (x)'\underset{\sim}{Q}^*/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n)\underset{\sim}{Q}^*)$$
$$\leqslant e(\mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}^* + (x)'\underset{\sim}{Q}^*/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n)\underset{\sim}{Q}^* + (x)'\underset{\sim}{Q}^*) \tag{1}$$

Wegen der Form der $A_1,\dots, A_r$ ist diese letzte Größe gleich $e(\mathfrak{m}/(f_1{}^n,\dots,f_r{}^n))$. Um zu einer Abschätzung zu gelangen, die uns den gewünschten Widerspruch liefert, gehen wir mit Hilfe des Lechschen Lemmas ([*4*] 24.4) zur Grenze über und benutzen [*4*] 23.5 :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} e(\mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}^* + (x)'\underset{\sim}{Q}^*/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n)\underset{\sim}{Q}^*)\\
&\quad\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} e(\mathfrak{m}/(f_1{}^n,\dots,f_r{}^n))\\
&\quad= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} \sum_{i=1}^{s} e(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i)\, L(R_{\mathfrak{p}_i}/(f_1{}^n,\dots,f_r{}^n))\\
&\quad= \sum_{i=1}^{s} e(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i)\, e((f_1,\dots,f_r)\, R_{\mathfrak{p}_i})\\
&\quad= \sum_{i=1}^{s} e(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i)\, e(\mathfrak{b}R_{\mathfrak{p}_i})
\end{aligned} \tag{2}$$

Zur Abschätzung der ersten Größe in (2) nach unten ziehen wir ebenfalls [*4*] 23.5 heran, da wir ja mindestens einige der minimalen Primideale des Ringes $\underset{\sim}{Q}^*/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n)$ kennen :

$$\begin{aligned}
&e(\mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}^* + (x)'\underset{\sim}{Q}^*/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n)\underset{\sim}{Q}^*)\\
&\quad\geqslant e(\mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}^* + (x)'\underset{\sim}{Q}^*/\mathfrak{r})\, L(\underset{\sim}{Q}^*_{\mathfrak{r}}/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n))\\
&\qquad+ \sum_{i=1}^{s} e(\mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}^* + (x)'\underset{\sim}{Q}^*/\mathfrak{p}_i\underset{\sim}{Q}^*)\, L(\underset{\sim}{Q}^*_{\mathfrak{p}_i Q^*}/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n))\\
&\quad\geqslant cn^r + \sum_{i=1}^{s} e(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i)\, L(\underset{\sim}{Q}^*_{\mathfrak{p}_i Q^*}/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n)),
\end{aligned} \tag{3}$$

wobei sich $L(\underset{\sim}{Q}^*_{\mathfrak{r}}/(A_1{}^n,\dots, A_r{}^n)) \geqslant cn^r$ genau wie oben aus einer Betrachtung der Struktur des Ringes $\underset{\sim}{Q}^*_{\mathfrak{r}} = (\underset{\sim}{Q}^*_S)_{\mathfrak{r}Q^*_S}$ durch sukzessives Erweitern mit dem multiplikativen System S und Lokalisieren ergibt. Das Lechsche Lemma liefert wieder

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} L(Q^*_{\mathfrak{p}_i Q^*}/(A_1{}^n,\ldots, A_r{}^n)) = e((A_1,\ldots, A_r)\, Q^*_{\mathfrak{p}_i Q^*}). \tag{4}$$

Nun sind die Elemente $A_1,\ldots, A_r$, die in $Q^*_{\mathfrak{p}_i Q^*}$ ein Parametersystem bilden, in der Art des Beweises von [*4*] 24.1 sukzessive superfiziell für $\mathfrak{a}Q^*_{\mathfrak{p}_i Q^*}$, weil sie mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt sind (vgl. den Beweis von [*4*] 22.1). Wir können also wie bei [*4*] 24.1 folgern, daß

$$e((A_1,\ldots, A_r)\, Q^*_{\mathfrak{p}_i Q^*}) = e(\mathfrak{a}Q^*_{\mathfrak{p}_i Q^*}) = e(\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}_i}) \tag{5}$$

ist. Damit ergibt sich aus (3), (4) und (5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} e\,(\mathfrak{m}Q^* + (x)'Q^*/(A_1{}^n,\ldots, A_r{}^n)\, Q^*) \geqslant c + \sum_{i=1}^{s} e(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i)\, e(\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}_i}), \tag{6}$$

was wegen $e(\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}_i}) = e(\mathfrak{b}R_{\mathfrak{p}_i})$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ der Abschätzung (2) widerspricht· Satz 1 ist also bewiesen.

§ 5

Wir schließen hier noch ein paar Bemerkungen an, die zeigen, daß die Anwendungsmöglichkeiten von Satz 2 mit Satz 1 nicht erschöpft sind. Da es sich nur um Andeutungen handeln wird, beschränken wir uns auf den Fall, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ nulldimensionale Ideale in dem lokalen Ring R sind. Die Elemente $f_1,\ldots, f_r$ mögen eine Basis von $\mathfrak{b}$ und $f_1,\ldots, f_r,\ldots, f_m$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ bilden. Mit den vor Satz 2 eingeführten Bezeichnungen gilt dann :

SATZ 3. *Es ist stets*

$$L(R/\mathfrak{b}) \geqslant L(R[x_{11},\ldots, x_{rm}]_{\mathfrak{m}R[x_{11},\ldots,x_{rm}]}/(A_1,\ldots, A_r)),$$

wobei die rechts stehende Länge eine Invariante $v_r(\mathfrak{a})$ *von* $\mathfrak{a}$ *ist. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn der in Satz 2 eingeführte Ring* Q' *ein Macaulayring mit dem einzigen minimalen Primideal* $\mathfrak{m}Q'$ *ist.*[2] *Ist das der Fall, so ist* $\mathfrak{b}$ *eine Reduktion von* $\mathfrak{a}$.

---

[2] Ohne Beweis merken wir hier an, daß man in dem Fall, daß k unendlich ist, Elemente $f_1,\ldots, f_r \in \mathfrak{a}$ finden kann, so daß für das von ihnen erzeugte Ideal $\mathfrak{b}$ die Gleichheit $L(R/\mathfrak{b}) = v_r(\mathfrak{a})$ gilt. $v_r(\mathfrak{a})$ ist also dann das Minimum der Längen $L(R/\mathfrak{b})$ für alle von r Elementen aus $\mathfrak{a}$ erzeugten Ideale $\mathfrak{b}$. Der Beweis ist in [*1*] zu finden.

Beweis. Die Elemente x_{ij} mit $i \neq j$ bilden ein Parametersystem des lokalen Ringes $\underset{\sim}{Q}'$. Unter Benutzung der bekannten Formeln 24.3 und 23.5 aus [*4*] haben wir also für das von diesen Elementen erzeugte Ideal $(x)'$:

$$\begin{aligned} L(R/\mathfrak{b}) &= L(\underset{\sim}{Q}'/(x)'\underset{\sim}{Q}') \geqslant e((x)'\underset{\sim}{Q}') \\ &\geqslant e((x)'\underset{\sim}{Q}' + \mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}'/\mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}') \cdot L(\underset{\sim}{Q}'_{\mathfrak{m}Q'}) = L(\underset{\sim}{Q}'_{\mathfrak{m}Q'}). \end{aligned}$$

An diesen Abschätzungen liest man die ersten Behauptungen aus Satz 3 ab. Gilt das Gleichheitszeichen, so ist $\mathfrak{m}\underset{\sim}{Q}'$ das einzige minimale Primideal von $\underset{\sim}{Q}'$, $\mathfrak{a}\underset{\sim}{Q}'$ ist also nilpotent in $\underset{\sim}{Q}'$, und nach Satz 2 ist dann $\mathfrak{b}$ eine Reduktion von $\mathfrak{a}$.

Wegen Satz 3 liegt es nahe, Minimalitätsbedingungen von der Art $L(R/\mathfrak{b}) = v_r(\mathfrak{a})$ zu studieren. Wir müssen aber in diesem Zusammenhang auf [*1*] verweisen, wo auch Verallgemeinerungen und Korollare zu Satz 3 zu finden sind.

Herrn Prof. Dr. Scheja verdanke ich die Anregung zur Beschäftigung mit den Fragen, die hier behandelt sind. Den Herren Professoren Dr. Dr. h.c. H. Behnke und Dr. R. Remmert möchte ich danken für die stete Förderung während der Anfertigung meiner Dissertation.

Literatur

1. Böger, E. Minimalitätsbedingungen in der Theorie der Reduktionen von Idealen. *Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster*, Heft 40, 1968.

2. Nagata, M. The theory of multiplicity in general local rings. *Proc. Intern. Symp. Algebraic Number Theory, Tokyo-Nikko 1955*, pp. 191–226. Science Council of Japan, Tokyo, 1956.

3. Nagata, M. Note on a paper of Samuel concerning asymptotic properties of ideals. *Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A* 30 (1957), 165–175.

4. Nagata, M. Local rings. Wiley (Interscience), New York, 1962.

5. Northcott, D. G. und Rees, D. Reductions of ideals in local rings, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **50** (1954), 145–158.

6. Northcott, D. G. und Rees, D. A note on reductions of ideals with an application to the generalized Hilbert function. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **50** (1954), 353–359.

7. Rees, D. $\mathfrak{a}$-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **57** (1961), 8–17.

8. Samuel, P. La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique. *J. Math. Pur Appl.* 30 (1951), 159–274; Thèse, Paris, 1951.

9. Samuel, P. Some asymptotic properties of powers of ideals. *Ann. Math.* **56** (1952), 11–21.

10. Zariski, O. und Samuel, P. "Commutative Algebra", (Vol. I, II). Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1958. 1960.